Testvorbereitung Mathematik, V9
Prof. Dr. L. Eichner

provadis
School of International
Managemet & Technology

Hinweis: Alle Aufgaben sind ohne Hilfsmittel zu lösen.

1. Berechnen Sie:

a) $\sqrt[3]{27}$, b) $\sqrt{2^2}$, c) $\sqrt{(-2)^2}$, d) $\sqrt{-2^2}$, e) $\sqrt[3]{-27}$, f) $\sqrt{(-2)^4}$

2. Kürzen Sie und stellen Sie das Ergebnis ohne Bruchstrich dar.

a) $\dfrac{11x^7y^5}{30z^4} \cdot \dfrac{45z^8}{22y^3}$, b) $\dfrac{18a^9b^6}{35x^3y^2} : \dfrac{15a^4b^7}{14xy}$

3. Bringen Sie auf den Hauptnenner und fassen Sie zusammen:

a) $\dfrac{a-b}{a} - \dfrac{a+b}{b}$, b) $\dfrac{3a}{a-b} - \dfrac{3b}{a+b}$, c) $\dfrac{1}{a-1} + a + 1$

4. Ersetzen Sie in den folgenden Termen die Variable n durch den angegebenen Ausdruck und fassen Sie zusammen:

a) $3n+1; n$ durch $n+1$ ersetzen; b) $1-2n; n$ durch $n+3$;

c) $n^2-n; n$ durch $2n-1$; d) $(n+1)(n-2)-2n^2; n$ durch $n-1$

5. Beseitigen Sie die Klammern:

a) $(y^2+1)^2$, b) $(-3a-2)(-a-5)$, c) $(a-2b)^2$, d) $(2a^2+c^3)(2a^2-c^3)$

6. Berechnen Sie oder vereinfachen Sie:

a) $\log_3 \dfrac{1}{81\sqrt{3}}$, b) $\log_b(2a) + \log(5a^3)$, c) $\log(3xc^4) - \log(9x^2c^4)$,

d) $4\log_b x^{\frac{1}{4}}$, e) $-\dfrac{1}{3}\log\left(\dfrac{1}{8}\right)$, f) $\dfrac{\log_3(27)+7}{2}$

7. Beseitigen Sie die Brüche in den Klammern, wobei die Klammern erhalten bleiben sollen. (Beispiel: $3n(1-\frac{5}{n}) = 3(n-5)$):

a) $n^2\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2$, b) $n^3\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\left(2+\dfrac{1}{n^2}\right)$

8. Lösen Sie die folgenden Gleichungen nach x auf. (Die Lösungen müssen vereinfacht werden, dürfen aber ein Wurzelzeichen oder die imaginäre Einheit i enthalten.)

a) $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)^x=\left(\frac{1}{2}\right)^3$, b) $\frac{3^x}{\sqrt[3x]{3}}=\sqrt[6]{3}$, c) $\frac{2}{x}-\frac{1}{x-1}=0$,

d) $\frac{x}{x+7}+\frac{x-4}{x-5}=2$, e) $\frac{a}{b}+\frac{c}{1-x}=2$, f) $4x^2+8x+8=0$,

g) $x^4-4x^2=0$, h) $x^4+3x^2=0$, i) $\sqrt{x+4}+7=4$,

j) $\sqrt{2x+5}-\sqrt{4x-4}+1=0$

9. Lösen Sie nach x auf:

a) $y-1=\sqrt{x-1}$, b) $y=\ln(2x-1)$, c) $a^x=b^y$, d) $a^{xy}=b^{3y}$, e) $x=\log_b(a^x c)$

10. Schreiben Sie als Potenz (wobei Vereinfachungen vorzunehmen sind):

a) $\sqrt[3]{x\sqrt[5]{x}}$, b) $\sqrt{x^3}\sqrt[6]{x}$, c) $\sqrt{\sqrt[3]{25a^4}}$, d) $\sqrt{\frac{4}{\sqrt{2}}}$

11. Die Laufzeit eines Darlehens von K Euro mit einem jährlichen Zinssatz von 6 % bei monatlicher Verzinsung beginnt am 1.4.2007. Der Darlehensnehmer zahlt monatlich R Euro zurück, und zwar am 1. eines jeden Monats; erstmalig am 1.5.2007. Wie hoch ist sein Schuldenstand S am 1.7.2008? (Es ist der Aufzinsungsfaktor für die monatliche Verzinsung und eine Formel zur Berechnung von S anzugeben.)

12. Sizzieren Sie in ein und demselben kartesischen Koordinatensystem den Verlauf der Funktionen $y=x^2$ und $y=x^4$ (Maßstab nach eigenem Ermessen). Notieren Sie in der Darstellung stichwortartig (so kurz wie möglich) den Unterschied von $y=x^4$ zu $y=x^2$.

Testvorbereitung Mathematik, V9
Prof. Dr. L. Eichner

provadis
School of International
Managemet & Technology

Lösungen

Hinweis: Alle Aufgaben sind ohne Hilfsmittel zu lösen.

1. Berechnen Sie:
a) $\sqrt[3]{27} = \underline{\underline{3}}$, b) $\sqrt{2^2} = \underline{\underline{2}}$, c) $\sqrt{(-2)^2} = \underline{\underline{2}}$ (!), d) $\sqrt{-2^2} = \underline{\underline{2i}}$, e) $\sqrt[3]{-27} = \underline{\underline{-3}}$,
f) $\sqrt{(-2)^4} = \underline{\underline{4}}$

2. Kürzen Sie und stellen Sie das Ergebnis ohne Bruchstrich dar.
a) $\frac{11x^7y^5}{30z^4} \cdot \frac{45z^8}{22y^3} = \underline{\underline{3 \cdot 4^{-1} \cdot x^7 \cdot y^2 \cdot z^4}}$,
b) $\frac{18a^9b^6}{35x^3y^2} : \frac{15a^4b^7}{14xy} = \underline{\underline{12 \cdot 25^{-1} \cdot a^5 \cdot x^{-2} \cdot y^{-1} \cdot b^{-1}}}$

3. Bringen Sie auf den Hauptnenner und fassen Sie zusammen:
a) $\frac{a-b}{a} - \frac{a+b}{b} = \frac{ab-b^2-a^2-ab}{ab} = \underline{\underline{\frac{-b^2-a^2}{ab}}} \quad \left(= \underline{\underline{-\frac{b^2+a^2}{ab}}}\right)$
b) $\frac{3a}{a-b} - \frac{3b}{a+b} = \frac{3a^2+3ab-3ab+3b^2}{a^2-b^2} = \underline{\underline{\frac{3a^2+3b^2}{a^2-b^2}}}$
c) $\frac{1}{a-1} + a + 1 = \frac{1+a^2-1}{a-1} = \underline{\underline{\frac{a^2}{a-1}}}$

4. Ersetzen Sie in den folgenden Termen die Variable n durch den angegebenen Ausdruck und fassen Sie zusammen:
a) $3n+1$; n durch $n+1 \implies 3(n+1)+1 = \underline{\underline{3n+4}}$;
b) $1-2n$; n durch $n+3 \implies 1-2n-6 = \underline{\underline{-2n-5}}$;
c) n^2-n; n durch $2n-1 \implies (2n-1)^2-(2n-1) = 4n^2-4n+1-2n+1 =$
$\underline{\underline{4n^2-6n+2}}$;
d) $(n+1)(n-2)-2n^2$; n durch $n-1 \implies n(n-3)-2(n-1)^2 =$
$n^2-3n-2n^2+4n-2 = \underline{\underline{-n^2+n-2}}$

5. Beseitigen Sie die Klammern:
a) $(y^2+1)^2 = \underline{\underline{y^4+2y^2+1}}$,
b) $(-3a-2)(-a-5) = 3a^2+15a+2a+10 = \underline{\underline{3a^2+17a+10}}$,
c) $(a-2b)^2 = \underline{\underline{a^2-4ab+4b^2}}$, d) $(2a^2+c^3)(2a^2-c^3) = \underline{\underline{4a^4-c^6}}$

6. Berechnen Sie oder vereinfachen Sie:
a) $\log_3 \frac{1}{81\sqrt{3}} = \log_3\left(3^{-4} \cdot 3^{-\frac{1}{2}}\right) = \underline{\underline{-\frac{9}{2}}}$, b) $\log_b(2a) + \log_b(5a^3) = \underline{\underline{\log_b(10a^4)}}$,
c) $\log_b(3xc^4) - \log_b(9x^2c^4) = \log_b \frac{3xc^4}{9x^2c^4} = \underline{\underline{\log_b \frac{1}{3x}}}$,
d) $4\log_b x^{\frac{1}{4}} = \underline{\underline{\log_b x}}$, e) $-\frac{1}{3}\log_b\left(\frac{1}{8}\right) = \underline{\underline{\log_b 2}}$, f) $\frac{\log_3(27)+7}{2} = \underline{\underline{5}}$

7. Beseitigen Sie die Brüche in den Klammern, wobei die Klammern erhalten bleiben sollen. (Beispiel: $3n(1-\frac{5}{n}) = 3(n-5)$):

a) $n^2\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2 = \underline{\underline{(n+1)^2}}$, b) $n^3\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\left(2+\dfrac{1}{n^2}\right) = \underline{\underline{(n-1)(2n^2+1)}}$

8. Lösen Sie die folgenden Gleichungen nach x auf. (Die Lösungen müssen vereinfacht werden, dürfen aber ein Wurzelzeichen oder die imaginäre Einheit i enthalten.)

a) $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \implies x^2+2x=3 \implies x^2+2x-3=0$
$\implies \underline{\underline{x_1=-3;\ x_2=1}}$

b) $\frac{3^x}{\sqrt[3x]{3}} = \sqrt[6]{3} \implies 3^{x-\frac{1}{3x}} = 3^{\frac{1}{6}} \implies x-\frac{1}{3x}=\frac{1}{6} \implies x^2-\frac{1}{6}x-\frac{1}{3}=0$
$\implies x_{1,2} = \frac{1}{12} \pm \sqrt{\frac{1}{12^2}+\frac{48}{12^2}} = \frac{1}{12} \pm \frac{7}{12} \implies \underline{\underline{x_1=-\frac{1}{2};\ x_2=\frac{2}{3}}}$

c) $\frac{2}{x}-\frac{1}{x-1}=0 \implies \frac{2}{x}=\frac{1}{x-1} \implies 2x-2=x \implies \underline{\underline{x=2}}$

d) $\frac{x}{x+7}+\frac{x-4}{x-5}=2 \implies \frac{x^2-5x+x^2+3x-28}{x^2+2x-35}=2$
$\implies 2x^2-2x-28=2x^2+4x-70 \implies 42=6x \implies \underline{\underline{x=7}}$

e) $\frac{a}{b}+\frac{c}{1-x}=2 \implies \frac{c}{1-x}=2-\frac{a}{b} \implies \frac{c}{1-x}=\frac{2b-a}{b} \implies \frac{cb}{2b-a}=1-x$
$\implies \underline{\underline{x=1-\frac{cb}{2b-a}}} \quad \left(=\underline{\underline{\frac{2b-a-cb}{2b-a}}}\right)$

f) $4x^2+8x+8=0 \implies x^2+2x+2=0 \implies x_{1,2}=-1\pm\sqrt{-1}$
$\implies \underline{\underline{x_1=-1+i,\ x_2=-1-i}}$

g) $x^4-4x^2=0 \implies x^2(x^2-4)=0 \implies \underline{\underline{x_1=0,\ x_2=2,\ x_3=-2}}$

h) $x^4+3x^2=0 \implies x^2(x^2+3)=0 \implies \underline{\underline{x_1=0,\ x_2=i\sqrt{3},\ x_3=-i\sqrt{3}}}$

i) $\sqrt{x+4}+7=4 \implies \sqrt{x+4}=-3 \implies x+4=9 \implies x_1=5$
Probe: $\sqrt{9}\neq-3 \implies$ $\underline{\underline{\text{Gleichung unlösbar}}}$

j) $\sqrt{2x+5}-\sqrt{4x-4}+1=0 \implies \sqrt{2x+5}+1=\sqrt{4x-4}$
$\implies 2x+5+2\sqrt{2x+5}+1=4x-4 \implies 2\sqrt{2x+5}=2x-10$
$\implies \sqrt{2x+5}=x-5 \implies 2x+5=x^2-10x+25$
$\implies 0=x^2-12x+20 \implies x_1=2,\ x_2=10$
Probe: x_1 : $\sqrt{9}-\sqrt{4}+1\neq0 \implies x_1$ ist keine Lösung
x_2 : $\sqrt{25}-\sqrt{36}+1=0 \implies$ $\underline{\underline{x_2 \text{ ist Lösung}}}$

9. Lösen Sie nach x auf:

a) $y-1=\sqrt{x-1} \implies y^2-2y+1=x-1 \implies \underline{\underline{x=y^2-2y+2}}$

b) $y=\ln(2x-1) \implies e^y=2x-1 \implies \underline{\underline{x=\frac{e^y+1}{2}}}$

c) $a^x=b^y \implies \underline{\underline{x=y\log_a b}} \quad \left(=\underline{\underline{\log_a b^y}}\right)$

d) $a^{xy}=b^{3y} \implies xy=3y\log_a b \implies \underline{\underline{x=3\log_a b}}$

e) $x=\log_b(a^x c) \implies x=x\log_b a+\log_b c \implies \underline{\underline{x=\frac{\log_b c}{1-\log_b a}}}$

10. Schreiben Sie als Potenz (wobei Vereinfachungen vorzunehmen sind):

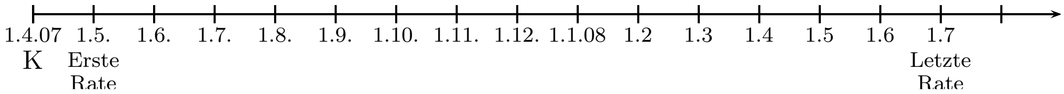
a) $\sqrt[3]{x\sqrt[5]{x}} = \left(x\cdot x^{\frac{1}{5}}\right)^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{3}+\frac{1}{15}} = x^{\frac{6}{15}} = \underline{\underline{x^{\frac{2}{5}}}}$

b) $\sqrt{x^3}\sqrt[6]{x} = x^{\frac{3}{2}}x^{\frac{1}{6}} = x^{\frac{10}{6}} = \underline{\underline{x^{\frac{5}{3}}}}$, c) $\sqrt{\sqrt[3]{25a^4}} = 25^{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2}} = \underline{\underline{5^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{2}{3}}}}$

d) $\sqrt{\frac{4}{\sqrt{2}}} = \frac{2}{2^{\frac{1}{4}}} = \underline{\underline{2^{\frac{3}{4}}}}$

11. Die Laufzeit eines Darlehens von K Euro mit einem jährlichen Zinssatz von 6 % bei monatlicher Verzinsung beginnt am 1.4.2007. Der Darlehensnehmer zahlt monatlich R Euro zurück, und zwar am 1. eines jeden Monats; erstmalig am 1.5.2007. Wie hoch ist sein Schuldenstand S am 1.7.2008 ? (Es ist der Aufzinsungsfaktor für die monatliche Verzinsung und eine Formel zur Berechnung von S anzugeben.)

Aufzinsungsfaktor: $q = 1 + \frac{6}{100\cdot 12} = 1 + \frac{0{,}5}{100} = \underline{\underline{1{,}005}}$



$$S = Kq^{15} - (Rq^{14} + Rq^{13} + \cdots + Rq + R) = \underline{\underline{Kq^{15} - R\frac{q^{15}-1}{q-1}}}$$

12. Skizzieren Sie in ein und demselben kartesischen Koordinatensystem den Verlauf der Funktionen $y = x^2$ und $y = x^4$ (Maßstab nach eigenem Ermessen). Notieren Sie in der Darstellung stichwortartig (so kurz wie möglich) den Unterschied von $y = x^4$ zu $y = x^2$.